ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3 ΩΡΩΝ
ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και f(α)≠f(β), τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=ξ$.

Μονάδες 12

Β. Να διατυπώσετε το θεώρημα ελάχιστης-μέγιστης τιμής.

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

β. Σε μία συνεχή συνάρτηση f αν $f(x_0)<0, x_0 \in A_f$ τότε $f(x)<0$ σε μία περιοχή του x_0 .

γ. Αν $\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=0, x_0 \in A_f$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

δ. Για τη συνεχή συνάρτηση και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(a)<x<f(\beta)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

- $-1\le f(x)\le x^4-2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $g(x)=\begin{cases} f(x-1) & ,x<2 \\ -1 & ,x=2 \\ f(-x+3) & ,x>2 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο1.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο2.

(Μονάδες 6)

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

γ) η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία (ε) : $y=-2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(-1,1)$.

(Μονάδες 6)

δ) οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in[-1,2]$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[-1,6]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-f(x)+\eta\mu(2024x-2024)}{x-1}=2024$,
- $f(x)=\dfrac{f(5)\cdot x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}-8,\ 2<x<3$,
- $|xf(x)|\le 1-\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in(0,1)$.

Να δείξετε ότι :

α) $f(1)=0$.

β) $f(5)=1$ και $f(3)=0$.

γ) $f(0)=0$.

δ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες και ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στα διαστήματα $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right],\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,

να βρείτε το πρόσημο της f .

(Μονάδες 6+6+6+7)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f^2(x)+g^2(x)=2f(x)\cdot g(x)+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x},\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}-2>0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-g\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right]\cdot\left(4\ln^2 x+1\right)}{\ln^2 x+\ln x+2}=4$. Να δείξετε ότι :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=3$.

(Μονάδες 7)

β) $f(1)>g(1)$.

(Μονάδες 6)

γ) $f(x)>\eta\mu x+g(x)$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 6)

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{|f(x)-g(x)|+4x^2}-2f(x)+2g(x)}{\sqrt{9x^2+x}-3x}=\dfrac{3}{2}$.

(Μονάδες 6)

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ.ΣΣΣΛ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $-1 \le f(x) \le x^4 - 2x^2$ (1).Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε $-1 \le f(1) \le -1$ οπότε $f(1)=-1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^4-2x^2\right)=-1$οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο 1.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x-1) \underset{\substack{x\to 2^-,\, u\to 1^- \\ u\to 0^-}}{\overset{u=x-1}{=}} \lim\limits_{u\to 1^-} f(u)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(-x+3) \underset{\substack{x\to 2^+,\, h\to 1^+ \\ h\to 1^+}}{\overset{h=-x+3}{=}} \lim\limits_{h\to 1^+} f(h)=-1$ και $g(2)=-1$.Επομένως $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=g(2)=-1$ άρα η g είναι συνεχής στο 2.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f(x)+2x$.
Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[-1,1]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $k(1)=f(1)+2=1>0$, $k(-1)=f(-1)-2=-3<0$ οπότε $k(1)\cdot k(-1)<0$.
(Από τη σχέση (1) έχουμε για $x=-1$: $-1 \le f(-1) \le -1$ οπότε $f(-1)=-1$.)

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano άρα η εξίσωση $k(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$ οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία (ε) : $y=-2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $b(x)=f(x)-g(x)$.
Είναι $b(2)=f(2)-g(2)=f(2)+1\ge 0$ από τη σχέση (1) για x=2.
Επίσης ,$b(-1)=f(-1)-g(-1)=-1-f(-2)\le 0$ από τη σχέση (1) για x=-2.
Αν $b(2)=0$, τότε το 2 ρίζα της εξίσωσης $b(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται στο σημείο $(2,-1)$.
Αν $b(-1)=0$, τότε το -1 ρίζα της εξίσωσης $b(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται στο σημείο $(-1,-1)$.
Αν $b(2)\cdot b(-1)<0$, η συνάρτηση b είναι συνεχής στο $[-1,2]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano οπότε η εξίσωση $b(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,2)$ οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in [-1,2]$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{xf(x)-f(x)+\eta\mu(2024x-2024)}{x-1}, x\neq 1 \Leftrightarrow$

$g(x)(x-1)=(x-1)f(x)+\eta\mu(2024(x-1)) \Leftrightarrow$

$(x-1)f(x)=g(x)(x-1)-\eta\mu(2024(x-1)) \Leftrightarrow f(x)=g(x)-\dfrac{\eta\mu(2024(x-1))}{x-1}.$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)-\dfrac{\eta\mu(2024(x-1))}{x-1}\right]=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)-2024\cdot\dfrac{\eta\mu(2024(x-1))}{2024(x-1)}\right]=2024-2024=0=f(1)$ αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,6]$ οπότε και στο 1.

$(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(2024(x-1))}{2024(x-1)} \underset{\substack{x\to 1,\\ a\to 0}}{\overset{a=2024(x-1)}{=}} \lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\eta\mu a}{a}=1).$

β) Η f είναι συνεχής στο 3 οπότε $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$.

Για 2<x<3 είναι $f(x)=\dfrac{f(5)\cdot x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}-8 \Leftrightarrow f(x)+8=\dfrac{f(5)\cdot x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4} \Leftrightarrow$

$f(5)\cdot x^2-9=(f(x)+8)\cdot\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 3^-}(f(5)\cdot x^2-9)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[(f(x)+8)\cdot\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)\right] \Leftrightarrow$

$9f(5)-9=(f(3)+8)\cdot 0=0 \Leftrightarrow 9f(5)=9 \Leftrightarrow f(5)=1.$

Επίσης $f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}-8\right)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{\cancel{(x^2-9)}\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{\cancel{x^2-9}}-8\right)=8-8=0.$

γ) $|xf(x)|\leq 1-\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow -1+\sigma\upsilon\nu 2x\leq xf(x)\leq 1-\sigma\upsilon\nu 2x.(1)$

Για $x>0$: $(1)\Rightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}\right)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-\sigma\upsilon\nu 2x+1}{x}\right)$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x} \underset{x\to 0^+\Rightarrow h\to 0^+}{\overset{h=2x}{=}} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{\frac{h}{2}}=\lim\limits_{h\to 0^+}2\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=2\cdot 0=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ αφού η f είναι συνεχής .

δ) Η f είναι συνεχής στο $[-1,6]$, οι αριθμοί 0, 1 και 3 είναι διαδοχικές και μοναδικές ρίζες άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0),(0,1),(1,3)$ και $(3,6]$.

- Είναι: $f(5)=1>0$ άρα $f(x)>0$ στο διάστημα $(3,6]$,
- Είναι: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}-8\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\cancel{(x^2-9)}\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{\cancel{x^2-9}}-8\right)=\sqrt{11}-4<0$ άρα

$f(x)<0$ στο διάστημα $(1,3)$

- ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},2\right]$ άρα

$f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(2)<0$ οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$ άρα $f(x)>0$ στο διάστημα $(0,1)$

- ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ άρα

$f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ οπότε $f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ άρα $f(x)<0$ στο διάστημα $(-1,0)$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έστω $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lambda, \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\mu$. Τότε $\lambda=2\mu-2$.

Είναι $f^2(x)+g^2(x)=2f(x)\cdot g(x)+x^2$.

Για $x\neq 0$ έχουμε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2=2\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{g(x)}{x}+1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{g(x)}{x}+1\right)\Leftrightarrow \lambda^2+\mu^2=2\lambda\mu+1\Leftrightarrow\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu=1\Leftrightarrow$

$(\lambda-\mu)^2=1\Leftrightarrow(2\mu-2-\mu)^2=1\Leftrightarrow(\mu-2)^2=1\Leftrightarrow(\mu-2=1\Leftrightarrow\mu=3 \text{ δεκτή})$ ή

$(\mu-2=-1\Leftrightarrow\mu=1 \text{ απορρίπτεται})$.

($2\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}-2>0\Leftrightarrow 2\mu-2>0\Leftrightarrow 2\mu>2\Leftrightarrow\mu>1$.)

Για μ=1 έχουμε $\lambda=2\cdot 3-2=4$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(\frac{x+1}{x}\right)-g\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(1+\frac{1}{x}\right)-g\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 1^+}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}=$

$\lim\limits_{u\to 1^+}\left[f(u)-g(u)\right]=f(1)-g(1),\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\ln^2 x+1}{\ln^2 x+\ln x+2}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ h\to+\infty}}{\overset{h=\ln x}{=}}\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{4h^2+1}{h^2+h+2}=\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{4\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}}=4$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[f\left(\frac{x+1}{x}\right)-g\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\cdot\left(4\ln^2 x+1\right)}{\ln^2 x+\ln x+2}=4\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\frac{x+1}{x}\right)-g\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\cdot\frac{4\ln^2 x+1}{\ln^2 x+\ln x+2}\right)=4\Leftrightarrow$

$\left(f(1)-g(1)\right)\cdot 4=4\Leftrightarrow f(1)-g(1)=1>0$ οπότε $f(1)>g(1)$.

γ) Είναι $f^2(x)+g^2(x)=2f(x)\cdot g(x)+x^2\Leftrightarrow$

$f^2(x)+g^2(x)-2f(x)\cdot g(x)=x^2\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-g(x)\right)^2=x^2\Leftrightarrow\left|f(x)-g(x)\right|=|x|\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\left|f(x)-g(x)\right|=x$ (1).

Για κάθε $x>0$ είναι $\left|f(x)-g(x)\right|>0\Leftrightarrow f(x)-g(x)\neq 0$.

Η συνάρτηση $k(x)=f(x)-g(x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, $k(x)\neq 0$ άρα η k διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.Όμως $k(1)=f(1)-g(1)>0$ οπότε $k(x)>0\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε $f(x)-g(x)=x$.

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\leq|x|\overset{x>0}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|\leq x\Leftrightarrow -x\leq\eta\mu x\leq x$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 οπότε $ημx < x \Leftrightarrow ημx < f(x)-g(x) \Leftrightarrow f(x) > ημx + g(x)$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{|f(x)-g(x)|+4x^2}-2f(x)+2g(x)}{\sqrt{9x^2+x}-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{|x|+4x^2}-2\big(f(x)-g(x)\big)}{\sqrt{9x^2+x}-3x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{|x|+4x^2}-2x}{\sqrt{9x^2+x}-3x} \underset{x>0}{\overset{x\to+\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+4x^2}-2x}{\sqrt{9x^2+x}-3x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\left(x+\cancel{9x^2}-\cancel{9x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+4x^2}+2x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\cdot\left(\sqrt{9+\dfrac{1}{x}}+3\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+4}+2\right)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.